Sistemas de Equações Lineares, Equações não Lineares e Estabilidade

Este trabalho tem por objetivo principal o estudo de métodos para a resolução de sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem, equações diferenciais não lineares e estabilidade. Não estamos preocupados exatamente com demonstrações rigorosas, tendo uma maior preocupação com o aspecto geométrico das soluções em cada caso. Estamos preocupados ainda em nos habituar com estes tipos de problemas, seus conceitos fundamentais, acentuando bem esta preocupação através de exercícios que aqui estão expostos na forma de exemplos.

Na primeira parte estamos enfocando Sistemas de equações diferenciais de primeira ordem e algumas aplicações relacionadas a este tema.

Sistemas de equações são "fenômenos" que ocorrem separadamente, mas que são acoplados entre si. Na natureza e no quotidiano sempre nos deparamos com situações que envolvem este tipo de sistema, como alguns problemas relacionados a redes elétricas e a mecânica. Nestes casos, podemos expressar estes problemas como sistemas de equações lineares de primeira ordem, escritas da seguinte forma.

$$x' = Ax$$

Inicialmente foi feita uma revisão que abordou resolução de equações diferenciais de primeira e segunda ordem.

Outro ponto de vital importância dentro deste estudo é sem dúvida o que cabe à Álgebra Linear, mais especificamente no que diz respeito a Matrizes, Autovalores, Autovetores, dependência e independência linear e resolução de sistemas lineares.

A primeira parte do trabalho é iniciada com um problema físico envolvendo um sistema massa-mola. À partir deste problema, exploramos alguns teoremas que são muito importantes em sistemas de equações diferenciais lineares; é a teoria básica de equações diferenciais lineares, que além dos teoremas, discute sobre as soluções gerais destes sistemas, que são do tipo:

$$x(t) = \xi^{(1)}e^{r_1 t} + \xi^{(2)}e^{r_2 t} + \cdots + \xi^{(n)}e^{r_n t}$$

com r_i sendo os autovalores relacionados a matriz dos coeficientes do sistema e $\xi^{(i)}$ os seus respectivos autovetores.

O trabalho conta ainda com alguns conceitos e definições importantes, que são bem expostos e explorados. São discutidas ainda, as características das soluções gerais (expostas acima) para sistemas:

- Hermitianos
- Não Hermitianos
- Sistemas com Autovalores Complexos
- Sistemas com Autovalores Repetidos

Com estes conceitos, são resolvidos alguns problemas, inclusive o que serviu como motivação inicial para o trabalho. Trabalhamos também com o Conceito de Matrizes fundamentais e com isso, chegamos a uma forma de calcular a exponencial de uma matriz.

Terminada a parte envolvendo sistemas homogêneos, ainda na primeira parte, é discutido sobre sistemas não lineares e suas formas de resolução.

Na segunda parte enfocamos tópicos relacionados a equações não lineares, trabalhando com os conceitos de estabilidade, instabilidade, estabilidade assintótica, sistemas autônomos, sistemas quase lineares, entre outros. Também nesta parte estudamos o teorema de existência e unicidade para equações diferenciais, que é um ponto importantíssimo quando se trabalha com este tipo de equação e não foi estudado na primeira parte.

Nesta parte do trabalho estaremos estudando a resolução de equações diferenciais não lineares de forma geométrica. Isso significa que estaremos preocupados com as trajetórias das soluções de cada problema e não uma resolução numérica, já que isto nos custaria um outro tipo de estudo, o que não é objetivado neste trabalho. São muitas as equações diferenciais, especialmente não lineares, insucessíveis de resolução analítica mediante procedimento razoavelmente conveniente. É por isso que nosso foco está essencialmente na visão geométrica da resolução deste tipo de equação.

Para termos tal visão geométrica, estudamos o plano de fase para cada tipo autovalor relacionado com o sistema linear dado, com o tipo de ponto crítico e de estabilidade. Posteriormente, expandimos tal visão para sistemas quase lineares, o que nos gera a seguinte tabela:

	Linear		Quase Linear	
r_1, r_2	Tipo	Estabilidade	Tipo	Estabilidade
$r_1 > r_2 > 0$	NI	Instável	NI	Instável
$r_1 < r_2 < 0$	NI	Assint. Estável	NI	Assint. Estável
$r_2 < 0 < r_1$	PS	Instável	PS	Instável
$r_1 = r_2 > 0$	NP ou NI	Instável	NP, NI, PE	Instável
$r_1 = r_2 < 0$	NP ou NI	Assint. Estável	NP, NI, PE	Assint. Estável
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$				
$\lambda > 0$	PE	Instável	PE	Instável
$\lambda < 0$	PE	Assint. Estável	PE	Assint. Estável
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	PC	Estável	PC ou PE	Indeterminado

Onde NI: Nódulo Impróprio; PS: Ponto de Sela; NP: Nódulo Próprio; PE: Ponto de Espiral; PC: Ponto de Centro, r_1 e r_2 autovalores.

Como aplicação do estudo, o trabalho traz os modelos de ”Espécies em competição” e ”Predador Presa”, também conhecido como ”Equações de Lotka e Volterra”.

Apesar da visão Geométrica ser um bom recurso para a resolução qualitativa de equações diferenciais não lineares, muitas vezes não é possível utilizar este método. Por isso, temos o Segundo método de Liapunov, que consiste na análise do sistema não linear através de uma função apropriada. Este método é bem abrangente e permite-nos discussões sobre as regiões de estabilidade/instabilidade mais detalhadas do que o que tínhamos até aqui e isso sem o uso direto de equações diferenciais. Este método pode inclusive ser usado para resolver sistemas diferentes dos quase lineares, o qual não é trabalhado aqui.

O último tópico deste trabalho é: Soluções Periódicas e Ciclos Limites. Aqui estamos interessados em encontrar possíveis soluções periódicas para sistemas autônomos de segunda ordem

$$x' = f(x)$$

que devem obedecer à relação

$$x(t+T) = x(t)$$

para todo t e em um determinado período $T > 0$. Neste caso, as curvas que representam as soluções para este tipo de equação são curvas fechadas.

Este trabalho foi desenvolvido com o estudo individual, acompanhado semanalmente pelo professor orientador através de seminários, onde eram tiradas as dúvidas e eram proporcionados momentos de reflexão e raciocínio na busca de soluções para problemas encontrados em exercícios, em demonstrações de teoremas ou simplesmente na compreensão de definições.

Alguns tópicos estudados não foram explicitados neste trabalho para que o mesmo não ficasse por demais extenso.